

## Χριστοπούλου: Τα διλήμματα του Benacerraf

Δήμητρα Χριστοπούλου: *Τα διλήμματα του Paul Benacerraf: Μια προβληματική της φιλοσοφίας των μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Οκτώ 2017, 216 σ., 16,50 €.

---

**Κρίνει η Μαρία Παναγιωτάτου (ΕΜΠ)**

[mpana@central.ntua.gr](mailto:mpana@central.ntua.gr)

Το βιβλίο *Τα διλήμματα του Paul Benacerraf: Μια προβληματική της φιλοσοφίας των μαθηματικών* της Δήμητρας Χριστοπούλου (στο εξής: *Διλήμματα*) καταπιάνεται με τον πλούτο των προβλημάτων (και τις προσπάθειες αντιμετώπισής τους) που εγείρουν δύο από τα σημαντικότερα άρθρα του Αμερικανού φιλοσόφου Πολ Μπινάσεραφ. Λόγω της μεγάλης επίδρασης και της εξαιρετικής σημασίας τους για τη φιλοσοφία των μαθηματικών, θεωρώ χρήσιμο, πριν αναφερθώ συγκεκριμένα στο βιβλίο, να περιγράψω το φιλοσοφικό πλαίσιο από το οποίο πρόκειται να το προσεγγίσω.

Ο *ρεαλισμός ως προς την οντολογία* [realism in ontology] των μαθηματικών αντικειμένων είναι η θέση σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα –αριθμοί, σύνολα, συναρτήσεις, και παρόμοια– υπάρχουν και η ύπαρξή τους είναι ανεξάρτητη από τα νοήμονα όντα [intelligent agents], τη γλώσσα, τη σκέψη και τις μεθόδους ή τις πρακτικές που χρησιμοποιούν.<sup>1</sup> Συχνά καλείται και *πλατωνισμός* εφόσον αποδίδει αφηρημένο χαρακτήρα στα μαθηματικά αντικείμενα, αντλώντας την έμπνευσή του από τη θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνα· ωστόσο, στη σύγχρονη εκδοχή του, ο μαθηματικός *πλατωνισμός* ή *ρεαλισμός ως προς την οντολογία* θα πρέπει να διακρίνεται από τις απόψεις του αρχαίου φιλοσόφου περί των μαθηματικών.<sup>2</sup>

Οι αντιρεαλιστικές απόψεις σχετικά με το status των μαθηματικών αντικειμένων είναι είτε *ιδεαλιστικές* (τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν αλλά όχι ανεξάρτητα από τα νοήμονα όντα) είτε *νομιναλιστικές* (τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν). Αν και ο *ρεαλισμός ως προς την οντολογία* ή *πλατωνισμός* συνιστά οντολογική-μεταφυσική θέση χωρίς γνωσιολογικούς ισχυρισμούς, οι γνωσιολογικές του συνέπειες είναι ολοφάνερες. Ο αφηρημένος χαρακτήρας του τρόπου ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων τα

---

<sup>1</sup> S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (Oxford: Oxford University Press 1997), σ. 37.

<sup>2</sup> Ο Ø. Linnebo, *Philosophy of Mathematics* (Princeton: Princeton University Press 2017), σ. 9, αναφέρεται και σε μια ασθενέστερη εκδοχή οντολογικού ρεαλισμού, τον *ρεαλισμό αντικειμένου* [object realism] ο οποίος υποστηρίζει απλώς ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, χωρίς αναφορά σε ανεξαρτησία ή αφηρημένο χαρακτήρα.

καθιστά μη εντοπισμένα στον χώρο και στον χρόνο καθώς και αιτιακώς αδρανή. Και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά μετατρέπουν, το λιγότερο που μπορούμε να πούμε, σε δύσκολη υπόθεση τη γνωστική μας πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα.

Μια άλλη εκδοχή ρεαλισμού, η οποία αφορά τη σημασιολογία των μαθηματικών προτάσεων, ο *ρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή* [realism in truth-value], υποστηρίζει ότι κάθε καλώς σχηματισμένη μαθηματική πρόταση έχει αντικειμενική αληθοτιμή ανεξάρτητα από το αν μπορεί να γίνει γνωστή ή να αποδειχθεί από νοήμονα όντα.<sup>3</sup> Αν και ο *ρεαλισμός ως προς την οντολογία* διακρίνεται σαφώς από τον *ρεαλισμό ως προς την αληθοτιμή*, η αναφορά του πρώτου σε ανεξαρτησία οδηγεί σχεδόν αναπόφευκτα στον δεύτερο, χωρίς όμως να ισχύει και το αντίστροφο. Τα μαθηματικά αντικείμενα, όντας ανεξάρτητα από νοήμονα όντα, αφορούν μαθηματικές προτάσεις με δεδομένη αντικειμενική αληθοτιμή, που παραμένουν αληθείς ή ψευδείς είτε υπάρχουν νοήμονα όντα είτε όχι. Ωστόσο, ο *ρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή*, ως φιλοσοφική θέση χωρίς οντολογικές αναφορές, μπορεί, υπό προϋποθέσεις, να γίνει αποδεκτός, για παράδειγμα, και από έναν *νομιναλιστή* περί των μαθηματικών, ο οποίος, όπως αναφέρθηκε, δεν δέχεται την ύπαρξη (αφηρημένων ή όχι) μαθηματικών αντικειμένων. Από την άλλη, ένας *ιδεαλιστής* όσον αφορά το status των μαθηματικών αντικειμένων, θα είναι *αντιρεαλιστής ως προς την αληθοτιμή*, εφόσον για αυτόν οι τιμές αληθείας των μαθηματικών προτάσεων θα εξαρτώνται, όπως και τα μαθηματικά αντικείμενα, από τις δυνατότητες της ανθρώπινης νόησης.

Τα δύο πρώτα κεφάλαια των *Διλημμάτων* αφορούν τη γνωσιολογική πρόκληση που αναδεικνύεται στο πολυδιαβασμένο άρθρο του Μπινάσεραφ "Mathematical Truth" (1973).<sup>4</sup> Εκεί, ο συγγραφέας (ανα)διατυπώνει κάποια από τα σημαντικότερα προβλήματα που οφείλουν να αντιμετωπίσουν οι φιλόσοφοι των μαθηματικών. Στο πλαίσιο της πεποίθησής του ότι μια συνολική θεώρηση για τη φύση της μαθηματικής αλήθειας θα πρέπει να συνδυάζει *ικανοποιητική σημασιολογία με αποδεκτή γνωσιολογία*, εξετάζει στο προαναφερθέν άρθρο τις υποψήφιες προσεγγίσεις. Το απαισιόδοξο συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει είναι ότι κάθε προσπάθεια υπηρέτει είτε τον πρώτο είτε τον δεύτερο σκοπό εις βάρος πάντα του άλλου.

Για τον Μπινάσεραφ, μια *ικανοποιητική σημασιολογία* θα αντιμετώπιζε ομοιόμορφα τις προτάσεις των μαθηματικών με τις προτάσεις της επιστήμης και της καθημερινής γλώσσας. Χωρίς να αρνείται τις διαφορές που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ τους, αναμένει, όπως γράφει, ότι «αυτές θα εμφανιστούν στο επίπεδο της ανάλυσης της αναφοράς των ενικών όρων και των κατηγορημάτων» (σ. 667). Μια τέτοια γενική θεωρία, η οποία ορίζει την αλήθεια βάσει της αναφοράς (ή της ικανοποίησης), δεν είναι άλλη από τη θεωρία αλήθειας του Τάρσκι. Κατά τον Μπινάσεραφ (σ. 670), η θεωρία του Τάρσκι μάς παρέχει τη μόνη βιώσιμη γενική περιγραφή της αλήθειας και, επομένως, κάθε υποψήφια ανάλυση της μαθηματικής αλήθειας θα πρέπει τουλάχιστον να ευθυγραμμίζεται μαζί της (σ.

<sup>3</sup> Shapiro, *ό.π.*, σ. 37· Linnebo, *ό.π.*, σ. 31.

<sup>4</sup> P. Benacerraf, "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy* 70 (1973), σ. 661-679.

667). Όσον αφορά μια *αποδεκτή γνωσιολογία*, ο Μπινάσεραφ (σ. 671) εκφράζει απερίφραστα την προτίμησή του σε μια αιτιακή θεωρία της γνώσης όπου «για να γνωρίζει ο X ότι η S είναι αληθής απαιτείται να υφίσταται κάποια αιτιακή σχέση μεταξύ του X και των αντικειμένων αναφοράς των ονομάτων, των κατηγορημάτων, και των ποσοδεικτών της S».

Η περίπτωση της «καθιερωμένης» σημασιολογικής προσέγγισης με μια πλατωνιστική αντίληψη για τη φύση των αριθμών» (σ. 664), μια εκδοχή συνδυασμού, με άλλα λόγια, *ρεαλισμού ως προς την αληθοτιμή με ρεαλισμό ως προς την οντολογία*, οδηγεί σε δύσβατα γνωσιολογικά μονοπάτια. Ακόμα κι αν διαθέτουμε μια ικανοποιητική σημασιολογία στο πνεύμα του Τάρσκι, δεν είναι εύκολο να εξηγήσουμε, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, πώς μπορούμε να γνωρίσουμε τα μαθηματικά αντικείμενα εφόσον αυτά δεν είναι εντός χωροχρόνου και αιτιακώς ενεργά.

Από την άλλη, η περίπτωση μιας «συνδυαστικής» [combinatorial] προσέγγισης, η οποία θα υποστηρίζει ότι η μαθηματική γνώση αποκτάται μέσω των αποδείξεων, οδηγεί σε σημασιολογικές περιπέτειες. Κι αυτό διότι οι «συνδυαστικές» προσεγγίσεις δεν ικανοποιούν το αίτημα της ομοιόμορφης σημασιολογικής προσέγγισης βάσει της αναφοράς: αναζητούν τα θεμέλια της αλήθειας στις ίδιες τις αποδείξεις, και το αίτημα της ομοιόμορφης σημασιολογίας της μαθηματικής γλώσσας με εκείνη της επιστημονικής και της καθημερινής γλώσσας εγκαταλείπεται ανεπιστρεπτί. Επομένως, αν κάποιος ή κάποια επιλέξει να μην αναλύσει την αλήθεια των προτάσεων της μαθηματικής γλώσσας με αναφορικό τρόπο, τότε, όχι μόνο πρέπει να προτείνει μια νέα θεωρία αλήθειας για αυτό το πρωτότυπο μη αναφορικό είδος γλώσσας, αλλά θα πρέπει επίσης να συσχετίσει τη νέα σημασιολογική προσέγγιση της αλήθειας με την προσέγγιση της αλήθειας που χρησιμοποιούμε για τις «αναφορικές» [referential] γλώσσες (σ. 669).

Συνέπεια όλων των παραπάνω αποτελεί ουσιαστικά το «τρίλημμα» για τον ή τη φιλόσοφο των μαθηματικών, που, όπως γράφει ο Αραγεώργης,<sup>5</sup> «θα πρέπει είτε να λύσει τα γνωσιολογικά προβλήματα του ρεαλισμού είτε να απεμπολήσει το αίτημα της ομοιομορφίας της σημασιολογίας της μαθηματικής γλώσσας με εκείνη της επιστημονικής και καθημερινής γλώσσας είτε να προτείνει μια διαφορετική σημασιολογία για την επιστημονική και την καθημερινή γλώσσα».

Στο πρώτο κεφάλαιο των *Διλημμάτων* (σ. 27-61) δίνεται αναλυτική περιγραφή της προβληματικής τού εν λόγω άρθρου του Μπινάσεραφ και παρουσιάζονται κάποιες από τις προσπάθειες επίλυσης της γνωσιολογικής πρόκλησης είτε στην κατεύθυνση της απόρριψης της αιτιακής θεωρίας της γνώσης είτε στην κατεύθυνση της υπεράσπισης του *a priori* χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης είτε, τέλος, στην κατεύθυνση μιας φυσικοποιημένης ή νατουραλιστικής αντιμετώπισης της πρόκλησης. Στο πλαίσιο αυτής της τελευταίας,

<sup>5</sup> Α. Αραγεώργης, «Βασικοί Όροι και Επιχειρήματα», *Σημειώσεις για το μάθημα της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών*, στην ηλεκτρονική πλατφόρμα του ΕΜΠ *mycourses*, 1, σ. 1.

περιγράφεται και το “επιχείρημα του αναπόδραστου” [indispensability argument] των Κουάιν-Πάτναμ, σύμφωνα με το οποίο η οντολογική μας δέσμευση απέναντι στα μαθηματικά αντικείμενα απορρέει από το γεγονός ότι είναι απαραίτητα για τη διατύπωση των καλύτερων επιστημονικών μας θεωριών. Στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου (σ. 63-88), αφού αναφερθούν οι επικρατέστερες αντιλήψεις περί αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων, το ενδιαφέρον στρέφεται στην προσπάθεια επίλυσης του γνωσιολογικού προβλήματος από τους Χέιλ και Ράιτ [Bob Hale, Crispin Wright] με το πρόγραμμα του νεολογικισμού ή νεοφρεγκεανισμού. Περιγράφεται η “αφαιρετική μέθοδος” του Φρέγκε, καθώς και ο τρόπος αξιοποίησής της στο πλαίσιο του προγράμματος προκειμένου να προσδιοριστούν αφηρημένες έννοιες (όπως η διεύθυνση μιας ευθείας ή η έννοια του φυσικού αριθμού) από συγκεκριμένες [concrete]· για παράδειγμα, η σχέση ισοδυναμίας μεταξύ της αφηρημένης έννοιας της “διεύθυνσης μιας ευθείας” και της συγκεκριμένης έννοιας της “παράλληλης δύο ευθειών” μάς δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε την πρώτη βάσει της δεύτερης. Στο ίδιο πνεύμα, οι Χέιλ και Ράιτ<sup>6</sup> θεωρούν ότι μπορούν να λύσουν το πρόβλημα της γνωστικής πρόσβασης στα αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα, κάνοντας χρήση σχέσεων ισοδυναμίας μεταξύ οικείων προτάσεων που μπορούν εύκολα να επαληθευτούν και προτάσεων των μαθηματικών με αφηρημένο λεξιλόγιο. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τα βασικά σημεία κριτικής στη νεοφρεγκεανή προσέγγιση των Χέιλ και Ράιτ όσον αφορά τη λύση του γνωσιολογικού προβλήματος στο πλαίσιο του ρεαλισμού.

Τα δύο επόμενα κεφάλαια των *Διλημμάτων* καταπιάνονται με το άλλο σημαντικό άρθρο του Μπινάσεραφ “What numbers could not be” (1965) [Τι δεν θα μπορούσαν να είναι οι αριθμοί].<sup>7</sup> Σε αυτό, ο Μπινάσεραφ, ορμώμενος από δύο διαφορετικές εκδοχές αναγωγής των φυσικών αριθμών σε σύνολα, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι αριθμοί δεν μπορούν να είναι αντικείμενα, στοιχειοθετώντας ένα ακόμα πρόβλημα για τον *ρεαλισμό ως προς την οντολογία*. Η μία από τις δύο συνολοθεωρητικές εκδοχές, όπου οι φυσικοί αριθμοί περιγράφονται ως πεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί:  $1=[\emptyset]$ ,  $2=[\emptyset, [\emptyset]]$ ,  $3=[\emptyset, [\emptyset, [\emptyset, [\emptyset]]]$  κ.λπ., οφείλεται στον φον Νόιμαν [J. von Neumann]. Η άλλη, όπου κάθε φυσικός αριθμός είναι ένα μονοσύνολο της μορφής  $1=[\emptyset]$ ,  $2=[[[\emptyset]]]$ ,  $3=[[[[[\emptyset]]]]]$  κ.λπ., οφείλεται στον Τσέρμελο [Ernst Zermelo]. Οι δύο εκδοχές, αν και συμφωνούν σε όλα τα δομικά χαρακτηριστικά των αριθμών που αναπαριστούν, δίνουν αντικρουόμενες απαντήσεις σε ερωτήματα όπως “το 3 ανήκει στο 4;”. Κατά συνέπεια το ερώτημα μένει μετέωρο αφού δεν υπάρχει κατ’ αρχήν λόγος να προτιμήσουμε τη μία εκδοχή από την άλλη και να πούμε είτε κατά φον Νόιμαν ότι “ανήκει” και είτε κατά Τσέρμελο ότι “δεν ανήκει”. Πέραν όμως της σημασιολογικής δυσκολίας, ο Benacerraf τονίζει ότι «το να *είσαι* ο αριθμός 3 δεν είναι τίποτα περισσότερο και τίποτα λιγότερο από το να έπεσαι από το 2, το 1, και πιθανόν το 0, και από το να ακολουθείσαι από το 4, το 5, και ούτω καθεξής

<sup>6</sup> B. Hale & C. Wright, “Benacerraf’s dilemma revisited”, *European Journal of Philosophy* 10/1 (2002), σ. 101-129.

<sup>7</sup> P. Benacerraf, “What Numbers Could Not Be” (1965), στο: P. Benacerraf & H. Putnam (επιμ.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2<sup>η</sup> έκδ., Cambridge: Cambridge University Press 1983), σ. 272-294.

[...] *Οποιοδήποτε αντικείμενο μπορεί να παίξει τον ρόλο του 3*· δηλαδή, οποιοδήποτε αντικείμενο μπορεί να είναι το τρίτο στοιχείο κάποιας προόδου [progression]. Η ιδιαιτερότητα του 3 είναι ότι ορίζει αυτόν τον ρόλο –όχι με το να είναι παράδειγμα κάθε αντικείμενου που παίξει τον ρόλο, αλλά με το να αναπαριστά τη σχέση που φέρει κάθε τρίτο στοιχείο μιας προόδου με την υπόλοιπη πρόοδο» (σ. 291, η έμφαση στο πρωτότυπο). Τουτέστιν, ο Μπινάσεραφ επιχειρηματολογεί ότι οι φυσικοί αριθμοί –και κατ' επέκταση όλοι οι άλλοι αριθμοί, ακέραιοι, πραγματικοί, κ.λπ.– διαθέτουν μόνο δομικές ιδιότητες, και αυτές από μόνες τους μπορεί να τους καθιστούν στοιχεία μιας αφηρημένης δομής αλλά δεν τους καθιστούν αντικείμενα. Όπως γράφει χαρακτηριστικά, «[τ]ο ότι ένα σύστημα αντικειμένων εκθέτει τη δομή των ακεραίων συνεπάγεται ότι τα στοιχεία αυτού του συστήματος διαθέτουν κάποιες ιδιότητες οι οποίες δεν εξαρτώνται από τη δομή. Είναι δυνατόν να εξατομικεύσουμε τα εν λόγω αντικείμενα ανεξάρτητα από τον ρόλο που διαδραματίζουν στη δομή. Ακριβώς αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει με τους αριθμούς» (σ. 291). Οι απόψεις του Μπινάσεραφ και σε αυτό το άρθρο, εκτός από το ότι τον κατατάσσουν στους *εξαλειπτικούς στρουκτουραλιστές*, πυροδότησαν συζητήσεις, κυρίως γύρω από την έννοια του αντικείμενου και το κατά πόσο οι δομικές ιδιότητες αρκούν ή όχι για να θεωρηθεί κάτι αντικείμενο.

Στο τρίτο κεφάλαιο των *Διλημάτων* (σ. 89-103) περιγράφεται η “σημασιολογική” πρόκληση (όπως καλείται από τη συγγραφέα που ακολουθεί τον Κατζ [Jerrold Katz]) του Μπινάσεραφ για τον μαθηματικό ρεαλισμό. Δηλαδή, η πρόκληση που αναδεικνύεται στο άρθρο του 1965 καθώς και η φιλοσοφική στάση, στρουκτουραλιστικής κατεύθυνσης, του Μπινάσεραφ απέναντι στους αριθμούς. Σκιαγραφείται η πρόταση του στρουκτουραλισμού για τα μαθηματικά, και το κεφάλαιο συμπληρώνεται από κριτικές παρατηρήσεις επ' αυτού. Στο τέταρτο κεφάλαιο (σ. 105-126) παρουσιάζεται η σχέση του “σημασιολογικού” διλήματος του Μπινάσεραφ με το «πρόβλημα του Καίσαρος». Η προφανής απάντηση, “όχι δεν ταυτίζεται”, στην ερώτηση «ταυτίζεται ο Ιούλιος Καίσαρας με τον αριθμό των δορυφόρων της Γης;», δεν μπορεί να προκύψει από τον ορισμό της έννοιας του αριθμού μέσω της ισοδυναμίας ( $N=$ ) ή αλλιώς “αρχής του Hume”. Κατά συνέπεια, η εν λόγω ισοδυναμία αδυνατεί να λειτουργήσει ως επαρκής *πλαισιακός* ορισμός της έννοιας του αριθμού, εφόσον αδυνατεί να διαχωρίσει τα αντικείμενα που εμπίπτουν στην έννοια από αυτά που δεν εμπίπτουν. Το κεφάλαιο αναφέρεται επίσης στην προσπάθεια του Frege να αντιμετωπίσει το πρόβλημα στρεφόμενος σε *εκτασιακούς* ορισμούς (οδηγούμενος τελικά στην κατάρρευση του προγράμματός του) καθώς και στις προσπάθειες των Χέιλ και Ράιτ να διασώσουν τους πλαισιακούς ορισμούς. Ως «ο πιο εύλογος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος» (σ. 125) παρουσιάζεται εκείνος του Χόουντς [Louis Hodes]· σχετίζει όμως τη λύση του προβλήματος με τη λογική 2<sup>ης</sup> τάξης η οποία θα πρέπει να συνιστά καθαρή λογική, εάν πρόκειται να συμβάλει στην αντιμετώπιση των διλημάτων του Μπινάσεραφ στο πλαίσιο του νεοφρεγκεανισμού.

Συνεπώς, το θέμα του πέμπτου κεφαλαίου (σ. 127-150) είναι η λογική 2<sup>ης</sup> τάξης και το αν αποτελεί καθαρή λογική ή συγκεκριμένη θεωρία συνόλων όπως υποστήριξε ο Κουάιν. Το επιχείρημα του Κουάιν βασίστηκε στην άποψη ότι η ποσόδειξη 2<sup>ης</sup> τάξης

δεσμεύεται οντολογικά σε ανώτερης τάξης οντότητες –ιδιότητες και σύνολα– και όχι μόνο σε ατομικά αντικείμενα [individuals] όπως η λογική 1<sup>ης</sup> τάξης. Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα τρία κατά Λίνεμπο [Øystein Linnebo] στοιχεία της *λογικότητας*: οντολογική καθαρότητα (ή ουδετερότητα), γνωσιολογική προτεραιότητα, καθολικότητα. Περιγράφεται η υπεράσπιση της οντολογικής καθαρότητας της λογικής 2<sup>ης</sup> τάξης από τον Μπούλος [George Boolos] μέσω της επαναδιατύπωσής της σε πληθυντική ποσόδειξη λογικής 1<sup>ης</sup> τάξης. Τέλος, εκθέτονται οι ενστάσεις στο εγχείρημα του Μπούλος και οι εναλλακτικές προτάσεις σε αυτό.

Στο έκτο κεφάλαιο (σ. 151-177), παρουσιάζονται δύο ενδιαφέρουσες εναλλακτικές εκδοχές πλατωνισμού περί των μαθηματικών αντικειμένων. Η πρώτη, ο *ήπιος πλατωνισμός* του Διονύσιου Αναπολιτάνου, υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα χαρακτηρίζονται από *ισχυρή δύναμη ύπαρξη* που επρόκειτο να ενεργοποιηθεί αναγκαία κατά την πλήρη εκδίπλωση του σύμπαντος και στο πλαίσιο μιας αιτιακής αλυσίδας που περιλαμβάνει απαραίτητα την εμφάνιση του έλλογου όντος. Η δεύτερη, ο *καθαρόαιμος πλατωνισμός* [full-blooded] του Μπαλάγκουερ [Mark Balaguer], θεωρεί ότι όλα τα *λογικά δυνατά* μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν *ενεργεία*, ενώ «το μόνο που απαιτείται για τη μαθηματική γνώση είναι η *συνέπεια* των μαθηματικών θεωριών» (σ. 162).

Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο (σ. 179-208), αναλύεται η περίπτωση του μαθηματικού Βάιλ [Hermann Weyl] και η προσέγγισή του, φαινομενολογικής οπτικής, στις φρεγκεανές αφαιρετικές αρχές. Στόχος της ανάλυσης, η διερεύνηση του κατά πόσο η προσέγγιση του Βάιλ μπορεί να δώσει μια δυνατή και βιώσιμη απάντηση στο “γνωσιολογικό” πρόβλημα του Μπινάσεραφ.

Παρά τις κάποιες δευτερεύουσες αδυναμίες τους, τα *Διλήμματα* επιτυγχάνουν τον στόχο τους: την παρουσίαση δηλαδή συγκεκριμένων προτάσεων (και της κριτικής που έχουν δεχτεί) για την αντιμετώπιση των προκλήσεων του Μπινάσεραφ. Ωστόσο, αξίζει ίσως να αναφερθούν κάποιες σκέψεις που θα μπορούσαν άλλες να εκληφθούν ως σημεία κριτικής και άλλες ως προτάσεις για ελάσσονος σημασίας βελτιώσεις του βιβλίου.

Η συγγραφέας, ακολουθώντας τον Κατζ, χαρακτηρίζει “σημασιολογική” πρόκληση το πρόβλημα που στοιχειοθετείται στο άρθρο του 1965 (σ. 16, Υ3). Η επικέντρωση όμως στη “σημασιολογική” δυσκολία από το εν λόγω άρθρο, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι περιορίζει το βάθος της προβληματικής του Μπινάσεραφ. Πιο συγκεκριμένα, στα *Διλήμματα* αναφέρεται ότι «ο μη μονοσήμαντος προσδιορισμός της αναφοράς των μαθηματικών όρων εκδηλώνεται στην προβληματική που εκφράζει ο Μπινάσεραφ στο άρθρο του “What Numbers Could Not Be” (1965), διατυπώνοντας ένα είδος σημασιολογικής κριτικής στον μαθηματικό ρεαλισμό» (σ. 89): χαρακτηρίζεται επίσης «και ως πρόβλημα *απροσδιοριστίας της αναφοράς* των αριθμητικών όρων με την έννοια ότι οι (ενικοί) αριθμητικοί όροι δεν επιτυγχάνουν να αναφερθούν μονοσήμαντα σε καθορισμένα αντικείμενα» (σ. 95). Ωστόσο, πέραν της σημασιολογικής δυσκολίας που επισημαίνεται στα προηγούμενα αποσπάσματα, το μείζον θέμα μπορεί να υποστηριχθεί ότι είναι

οντολογικής φύσεως. Κι αυτό διότι, ο «μη μονοσήμαντος προσδιορισμός» ή το «πρόβλημα απροσδιοριστίας» της αναφοράς των αριθμητικών όρων, συνιστά μέρος της επιχειρηματολογίας του Μπινάσεραφ για να υποστηρίξει τελικά ότι *οι αριθμοί δεν μπορούν να είναι αντικείμενα*, πλήττοντας τον *ρεαλισμό ως προς την οντολογία*.<sup>8</sup> Ο Λίνεμπο<sup>9</sup> χρησιμοποιεί τον χαρακτηρισμό “μεταφυσική ένσταση” από μέρους του Μπινάσεραφ, σύμφωνα με την οποία «δεν μπορούν να υπάρχουν αντικείμενα τα οποία έχουν μόνο δομικές ιδιότητες. Όλα τα αντικείμενα θα πρέπει να διαθέτουν και κάποιες μη δομικές ιδιότητες». Κατά συνέπεια, η υποβάθμιση της οντολογικής ή, απλώς, μεταφυσικής ένστασης του άρθρου του 1965 σε σχέση με τη σημασιολογική, μπορεί να θεωρηθεί ότι στερεί από τα *Διλήμματα* ένα σημαντικό κομμάτι του ενδιαφέροντος του άρθρου του Μπινάσεραφ και της κριτικής (θετικής και αρνητικής) που προκάλεσε.

Μια δεύτερη παρατήρηση που αξίζει να σημειωθεί μολονότι ελάσσονος σημασίας, είναι η διπλή απόδοση του “epistemological” στα κείμενα άλλοτε ως “γνωσιολογικό” και άλλοτε ως “επιστημολογικό”, χωρίς να έχει προηγηθεί υπόδειξη ότι οι δύο όροι θα χρησιμοποιούνται εναλλακτικά. Αν και δεν μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι υπάρχει ορθή και μη ορθή απόδοση του όρου, ανήκω στο σύνολο όσων προτιμούν το “γνωσιολογικό” διότι αποδίδει καθαρότερα τη σημασία του εφόσον ο όρος αναφέρεται στη γνώση και όχι στην επιστήμη. Σε κάθε περίπτωση, η εναλλακτική χρήση των δύο αποδόσεων στο ίδιο κείμενο θα ήταν ίσως προτιμότερο να μην επιλέγεται, για την αποφυγή σύγχυσης με τον γαλλικό όρο “épistémologie” που αποδίδεται στα ελληνικά επίσης ως “επιστημολογία” και θεωρείται συνώνυμη της “θεωρίας των επιστημών”. Ας σημειωθεί επίσης, ότι χρήσιμη θα ήταν σε μια επόμενη έκδοση η προσθήκη τουλάχιστον ευρετηρίου όρων και ονομάτων, αλλά και η συγκέντρωση σε ένα γλωσσάρι της ειδικής ορολογίας του βιβλίου που τόσο εύστοχα αποδίδεται στα ελληνικά.

Εν κατακλείδι, τα *Διλήμματα* συνιστούν ένα βιβλίο ολοκληρωμένο σε σχέση με τη θεματική τους. Παρά το γεγονός ότι αποτελούν συλλογή κειμένων που γράφτηκαν από τη συγγραφέα τους σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και σε διαφορετικά στάδια της ακαδημαϊκής της πορείας, εξοικειώνουν με τη σαφήνειά τους τον/ην αναγνώστη/ρια με ορισμένες από τις σημαντικότερες συζητήσεις της σύγχρονης φιλοσοφίας των μαθηματικών. Αν και το δυνατό σημείο του βιβλίου δεν είναι η ερευνητική του πρωτοτυπία, –η πλειονότητα των κειμένων είναι συστηματικές ανασκοπήσεις των κρίσιμων προβλημάτων και των τρόπων αντιμετώπισής τους, αφήνοντας την αίσθηση μη ικανοποίησης του ερωτήματος αναφορικά με τη θέση ή τη συμβολή σε όλα αυτά της ίδιας της συγγραφέως– η εμπειρισταωμένη και πολύπλευρη παρουσίαση των απόψεων και των προσεγγίσεων που πραγματεύεται το καθιστούν αναμφίβολα χρήσιμο ανάγνωσμα για την ελληνική φιλοσοφική κοινότητα, αλλά και τη μαθηματική που θέλει να γνωρίσει το αντικείμενο της φιλοσοφίας των μαθηματικών.

<sup>8</sup> Shapiro, *ό.π.*, σ. 5.

<sup>9</sup> Ø. Linnebo, "Platonism in the Philosophy of Mathematics", στο: E. N. Zalta (επιμ.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 Edition), <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>>, σ. 10.

---

**Δημοσιεύθηκε:** 30.12.2018

**Τρόπος παραπομπής στη βιβλιοκρισία:**

Παναγιωτάτου, Μαρία: (Βιβλιοκρισία του:) Δήμητρα Χριστοπούλου: *Τα διλήμματα του Paul Benacerraf: Μια προβληματική της φιλοσοφίας των μαθηματικών* (Αθήνα: Εκδόσεις Οκτώ 2017). *Κριτικά* 2018-09, <<http://www.philosophica.gr/critica/2018-09.html>>.